

$$u_{p_{x=5}<0.3}^{(t)} = g(\lambda^{(t)}) = \begin{cases} 1 & p_{x=5}^{(t)} < 0.3 \\ 0 & \text{それ以外の場合} \end{cases} \quad (7.9)$$

この関数は $p_{x=5}^{(t)} < 0.3$ ならば 1, そうでないなら 0 を返します。 $u_{p_{x=5}<0.3}^{(t)}$ の平均より, $p_{x=5}$ が 30% より小さくなる確率を評価します。注文が入る確率が 30% 未満となる確率は $U_{p_{x=5}<0.3}$ の EAP 推定値より, たったの 1.9% であることが分かりました。

7.3 ガンマ分布を用いた推測

流れ星問題 2: 「流れ星問題 1」で登場した H 君は 50 分間夢中で観測した後, 3 つお願い事があることを思い出しました。今から流れ星を 3 つ観測するためにはどのくらい待てばよいでしょうか。

ガンマ分布は, 独立に指数分布に従う α 個の確率変数の和を表す分布でした。これは, α 個のポアソン事象が発生するまでにかかる合計時間を考えていることと同じです。したがって, 「流れ星問題 2」のような「待ち時間」に関する問題には, ガンマ分布を適用することができます。3.4 節で出てきたガンマ分布の確率関数を再掲します。

$$f(x|\alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad 0 \leq x, \quad 0 < \lambda, \quad 0 < \alpha \quad (7.10)$$

λ は「流れ星問題 1」と同様に, 与えられたデータ (5 分ごとに流れ星の観測数を 10 回記録したデータ) からポアソン分布を使って推定します。ここでは流れ星を 3 つ観測するまでにかかる時間が知りたいため, $\alpha = 3, \lambda = \lambda^{(t)}$ のガンマ分布から, T 個の予測値を以下のように生成します。(7.11) 式中の $\sim$ は, 左辺の変数が右辺の確率分布に従うということを表す記号です。

$$x^{*(t)} \sim f(3, \lambda^{(t)}) \quad (7.11)$$

ただし, 個々の $x^{*(t)}$ はガンマ分布に従いますが, T 個の $x^{*(t)}$ によって構成される分布はガンマ分布とはならず, 新たに観測されるデータ x^* の予測分布の近似となります。この予測値に, 単位時間である 5 をかけた $x^{*(t)} \times 5$ について T 個の平均値を求めることで, 流れ星を 3 つ観測するまでの平均的な待ち時間を得ることができます。

表 7.4 「流れ星問題 2」に関する推定結果

	平均	標準偏差	95%下側	95%上側
$x^* \times 5$	29.903	24.258	4.693	92.413

実際に推定した結果が表 7.4 です。 $x^* \times 5$ の推定結果から, H 君がこれから 3 個流れ星を観測するには, 平均して約 30 分待つ必要があります, 少なくとも 5 分程度待たなくてはならず, 高々 1 時間半程度待てばよいことがわかりました。

7.4 幾何分布を用いた推測

2.2 節では, ベルヌイ試行の結果として得られる確率変数は, ベルヌイ分布

$$f(x|\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}, \quad x = 0, 1 \quad (7.12)$$

に従うことを確認しました。ここで, ベルヌイ試行の結果として得られる 2 値について, 1 なら成功, 0 なら失敗と考え, ベルヌイ試行を繰り返して行ったときに, 初めて成功するまでの試行回数を x とします。この確率変数 x が従う分布を幾何分布 (geometric distribution) といいます^{*5)}。確率関数は

$$f(x|\theta) = \theta(1-\theta)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots, n \quad (7.13)$$

となります。

ベルヌイ分布の確率関数 (7.12) 式では, x は 0 か 1 かのいずれかのみをとる確率変数でしたが, (7.13) 式の x は成功するまでの試行回数ですので $x = 1, 2, \dots, n$ となる点に注意してください。ベルヌイ試行の結果として得られる成功の確率が θ , 失敗の確率が $(1-\theta)$ ですから, (7.13) 式は, $(x-1)$ 回目までは失敗が続き x 回目でやっと成功する確率を表していることが分かります。また, 幾何分布の平均と分散は以下の通りです。

$$E[X] = \frac{1}{\theta} \quad (7.14)$$

$$V[X] = \frac{1-\theta}{\theta^2} \quad (7.15)$$

それでは, 幾何分布を利用した次の問題を考えてみましょう。

^{*5)} ベルヌイ試行を繰り返して行ったときに, 初めて成功するまでに失敗した試行の数 $Y = X - 1$ もまた幾何分布に従いますが, 確率関数およびその平均が (7.13) 式, (7.14) 式とは異なります。

当たり付き棒アイス問題：小学6年生のTくんの毎夏の楽しみは、当たり付き棒アイスです。毎年、2人の兄とともにアイスを食べ、その年初めて当たりが出るまでの本数を日記に残してきました。この6年間の結果は19本目、34本目、11本目、26本目、22本目、30本目で当たりが出ています。今日で夏休みが終わるので、兄弟3人でそれぞれ1本ずつアイスを買って食べることにしました。末っ子のTくんは二人の兄よりも食べるのが遅いので、アイスの当たりを確認するのが決まって最後になってしまいます。このとき、兄2人にはハズレが出て、Tくんにだけ当たりが出る確率はどのくらいでしょうか。

アイスを購入して当たりが出るかハズレが出るか確認するという試行はベルヌイ試行なので、その年初めて当たりが出るまでの試行回数は幾何分布に従っていると仮定できます。したがって、「当たり付き棒アイス問題」は、アイスを買ったとき、ちょうど3本目で当たりが出る確率について推測を行う問題といえます。この問題に答えるために、幾何分布の母数 θ を利用して1回のサンプリングごとに次のような生成量を定義します。

$$p_{x=3}^{(t)} = g(\theta^{(t)}) = f(x^* = 3|\theta^{(t)}) = \theta^{(t)}(1 - \theta^{(t)})^2 \quad (7.16)$$

上式は、幾何分布の確率関数(7.13)式に $x = 3$ を代入したときの $\theta^{(t)}$ による条件付き事後確率であり、3本目でちょうど当たりが出る確率を表します。

表 7.5 「当たり付き棒アイス問題」に関する推定結果

	EAP	post.sd	95% 下側	95% 上側
θ	0.049	0.018	0.020	0.090
$p_{x=3}$	0.044	0.014	0.019	0.075
$U_{\theta>1/36}$	0.896	0.305	0.000	1.000
μ	23.493	10.372	11.081	49.791

表 7.5 には、幾何分布の母数 θ および、生成量 $p_{x=3}$ のEAP推定値と事後分布に関する情報を示しました。 θ のEAP推定値が0.049となっていることから、Tくんの6年間の記録から推定されるこのアイスの当たりの確率は約5%と解釈できます。さらに、兄弟3人でアイスを買ったとき、先に食べ終わる兄2人にはハズレが出て、3番目に食べ終わるTくんに当たりが出る確率は、 $p_{x=3}$ のEAP

推定値から、平均的に4.4%となることが分かりました。また、 $p_{x=3}$ の確信区間[0.019, 0.075]より、興味の対象となっている確率は、95%の確率で1.9%から7.5%の間の値をとると考えることができます。兄弟3人のうちTくんだけが最後に当たりを出して気持ちよく今年の夏を終えられる確率は、残念ながらそれほど高くないようです。

ところで、巷では、このアイスは1ケース(36本入り)につき1本の当たりが入っていると噂されています。そこで、当たりが出る確率 θ が $1/36$ よりも大きくなる確率がどのくらいかについても検討してみましょう。そのために、新たな生成量 $u_{\theta>1/36}^{(t)}$ を定義します。

$$u_{\theta>1/36}^{(t)} = g(\theta^{(t)}) = \begin{cases} 1 & \theta^{(t)} > 1/36 \\ 0 & \text{それ以外の場合} \end{cases} \quad (7.17)$$

$u_{\theta>1/36}^{(t)}$ は、 $\theta^{(t)}$ が $1/36$ よりも大きければ1を返し、そうでなければ0を返す関数です。 $u_{\theta>1/36}^{(t)}$ の平均は、母数の標本のうち $\theta > 1/36$ となったものの割合であり、この値は、T君のデータから推測される当たりが出る確率が $1/36$ よりも大きくなる確率を表しています。表 7.5 における $U_{\theta>1/36}$ のEAP推定値より、当たりが出る確率 θ が $1/36$ よりも大きくなる確率は89.6%となりました。どうやら、Tくん兄弟がいつもアイスを買に行きコンビニにおける当たりの確率は、巷で噂されている当たりの確率 $1/36$ (≈ 0.028)よりも高い傾向にあるようです。

また、幾何分布の期待値は、(7.14)式によって求められるため、

$$\mu^{(t)} = g(\theta^{(t)}) = 1/\theta^{(t)} \quad (7.18)$$

と生成量を定義すると、分布の平均についても考察ができます。確率変数 x はベルヌイ試行において初めて成功するまでの総試行数ですので、 μ のEAP推定値より、このベルヌイ試行において初めて成功するまでには平均的に約24回試行を繰り返す必要があるということが分かります。

7.5 負の2項分布を用いた推測

幾何分布は、ベルヌイ試行において初めて(1回)成功するまでの試行回数が従う分布でした。今度は、ベルヌイ試行において k 回目の成功が得られるまでの

失敗回数に注目し、 x とおきます。この確率変数 x が従う分布は負の 2 項分布 (negative binomial distribution) となります*6)。

$$f(x|k, \theta) = {}_{(k+x-1)}C_{(k-1)} \theta^k (1-\theta)^x, \quad x = 0, 1, \dots, n \quad (7.19)$$

(7.19) 式の x を $x-1$ とし、かつ $k=1$ のとき、負の 2 項分布の確率関数は幾何分布の確率関数 (7.13) 式に一致することが分かります。負の 2 項分布の平均と分散は、以下の通りです。

$$E[X] = \frac{k(1-\theta)}{\theta} \quad (7.20)$$

$$V[X] = \frac{k(1-\theta)}{\theta^2} \quad (7.21)$$

ここで、次のような問題を考えます。

エントリーシート問題：Yさんは、現在就職活動の真ただ中で、これまでエントリーシートを提出した 20 社の結果は × × × ○ × ○ ○ × × × × × × × ○ × × × ○ × となっています。Yさんは、一次面接に進める企業を、どうしてもあと 2 社増やしたいと考えています。しかし、Yさんの大学では 1 週間後に学園祭が控えているため、しばらくエントリーシートの作成に時間を割くことが難しい状況です。

問 1. いま、完成までもう一息のエントリーシートが手元に 5 通あるので、この 5 通を学園祭の前に送ったとき、その中から 2 通以上が通過する確率はどれくらいでしょうか。

問 2. このあと 2 通のエントリーシートを通過させるためには、多く見積もって何社にエントリーシートを送ればよいでしょうか。

この問題で与えられているのは、ベルヌイ試行の結果ですので、データがベルヌイ分布に従っていると仮定して、その母数 θ をサンプリングします。その上で、生成量

$$p^{(t)} = g(\theta^{(t)}) = {}_{5+0-1}C_{5-1} \theta^5 (1-\theta)^0 + {}_{4+1-1}C_{4-1} \theta^4 (1-\theta)^1 + {}_{3+2-1}C_{3-1} \theta^3 (1-\theta)^2 + {}_{2+3-1}C_{2-1} \theta^2 (1-\theta)^3 \quad (7.22)$$

表 7.6 「エントリーシート問題」に関する推定結果

	EAP	post.sd	95% 下側	95% 上側
θ	0.273	0.092	0.113	0.471
p	0.202	0.103	0.043	0.434
	平均	標準偏差	95% 下側	95% 上側
$x^* + 2$	8.349	6.754	2.000	26.000

を定義することで、問 1 に答えることができます。 $p^{(t)}$ は、5 通送ったエントリーシートのうち、0 通が不合格で 5 通全部が合格となる確率、1 通が不合格で 4 通が合格となる確率、2 通が不合格で 3 通が合格となる確率、3 通が不合格で 2 通が合格となる確率の合計であり、5 通中 2 通以上が通過する確率を表します。

結果を表 7.6 に示しました。ベルヌイ分布の母数 θ の EAP 推定値は 0.273 となり、これは同時に、負の 2 項分布の確率関数 (7.19) 式の θ でもあります。Yさんのエントリーシートの通過率の平均は 3 割弱と解釈できます。

(7.22) 式で定義した生成量 p の EAP 推定値は 0.202 であり、学園祭前に送る 5 通のエントリーシートのうち 2 通以上が通過する確率は約 20%であることが分かりました。

では、どうしてもあと 2 通エントリーシートを通したい Yさんは、このあと何通のエントリーシートを送れば、高確率でその希望を叶えることができるでしょうか。問 2 に答えるためには、予測分布を利用します。 $k=2, \theta=\theta^{(t)}$ の負の 2 項分布に従う予測値

$$x^{*(t)} \sim f(2, \theta^{(t)}) \quad (7.23)$$

を生成し、この予測値に成功回数である 2 を足した $x^{*(t)} + 2$ によって、2 回成功するまでの総試行数に関する予測分布を近似的に得ることができます。

表 7.6 で、総試行数を表す $x^* + 2$ の平均値は 8.349 となっており、平均的には 9 通エントリーシートを送ればそのうち 2 通合格することが期待できます。しかし、できるだけ確実に 2 社の合格を得るためには、予測分布の区間 [2.000, 26.000] の 95%上側を参照し、26 通送ると良いでしょう。

*6) 独立なベルヌイ試行を繰り返したとき、 k 回の成功が得られるまでの総試行数もまた負の 2 項分布に従いますが、確率関数およびその平均が (7.19) 式、(7.20) 式とは異なります。

均体重が実施前よりも 2 kg 以上減少する」という研究仮説が正しい確率は 12.1%であり、2 kg 以上の減量を求めるならば実質的に有益なダイエットプログラムとはいえないでしょう。

第 7 章

- 1) λ_A と λ_B の 95%確信区間はそれぞれ [0.111, 0.880] と [0.221, 1.164] であり、95%確信区間が重複しています。そのため 2 つのポアソン分布の母数には一見差がないように見えますが、これでは $\lambda_B > \lambda_A$ を積極的に示していることにはなりません。次に、2 つの母数の差を表す生成量 δ の 95%確信区間 $[-0.415, 0.842]$ より、下側 2.5%点は -0.415 で 0 より小さいので、97.5%の確信では差があるとは言えません。この結果からでは波平さんの方がマスオさんより釣りが上手いかどうか判断するのは難しいため、最後に $\lambda_B > \lambda_A$ という仮説が正しい確率を求めます。 $U_{\delta>0}$ の EAP 推定値が 0.747 であることから、「波平さんのほうがマスオさんより釣りが上手い」という仮説が正しい確率は 74.7%であり、波平さんの方が釣りが上手いといえます。

	EAP	post.sd
λ_A	0.402	0.198
λ_B	0.600	0.243
δ	0.198	0.314
$U_{\delta>0}$	0.747	0.435
	95%下側	95%上側
λ_A	0.111	0.880
λ_B	0.221	1.164
δ	-0.415	0.842
$U_{\delta>0}$	0.000	1.000

- 2) η の EAP 推定値より、八重桜は平均的に 163.32 m おきに生えていることが分かりました。また 95%確信区間より八重桜を 1 本見た後、少なくとも約 90 m 歩かないと次の八重桜を見ることができませんが、高々約 300 m 歩けば次の八重桜を見ることができます。 $p_{x=100}$ の EAP

推定値より、100 m 歩く間に八重桜を 1 本以上見る確率は 48%であることが分かりました。よってこれから 100 m 歩いて休憩できるかどうかは五分五分くらいだといえます。その確率が 50%よりも高くなる確率は $U_{p_{x=100}>0.5}$ の EAP 推定値より、約 42%でした。

	EAP	post.sd
λ	0.007	0.002
η	163.320	53.940
$p_{x=100}$	0.480	0.100
$U_{p_{x=100}>0.5}$	0.420	0.494
	95%下側	95%上側
λ	0.003	0.011
η	89.187	296.449
$p_{x=100}$	0.286	0.674
$U_{p_{x=100}>0.5}$	0.000	1.000

- 3) $p_{x=4}$ の EAP 推定値および確信区間より、4 日後に I さんの意中の男性がお店に現れる確率は 9.8%であり、その確率は 95%の確率で 7.1%と 10.5%の間に存在することが示されました。さらに、 μ の推定値から、この男性は平均的に約 4 日に 1 回来店していると推測されました。

	EAP	post.sd
$p_{x=4}$	0.098	0.010
μ	3.865	1.359
	95% 下側	95% 上側
$p_{x=4}$	0.071	0.105
μ	2.169	7.310

- 4) p の EAP 推定値より、M さんが残りの 4 回のうち 3 回以上成功する確率は平均的に 10.4%です。また、 $x^* + 2$ の平均値は 6.772、予測分布の区間は [2.000, 21.000] となったため、平均的には約 7 回挑戦すれば新たに 2 つぬいぐるみを取ることができ、余裕をもって 21 回挑戦すれば目的を果たせる可能性が高いことが分かりました。

	EAP	post.sd
p	0.104	0.084
	95% 下側	95% 上側
p	0.008	0.324
	平均	標準偏差
$x^* + 2$	6.772	5.319
	95% 下側	95% 上側
$x^* + 2$	2.000	21.000

- 5) $\zeta_{0.50}$ の EAP 推定値より、次のお見合い相手の年収が 393 万円以上であれば、K さんは結婚の意思を固めてもよい、ということが示されました。さらに、31 人目のお見合い相手の年収が 500 万円であったとき、その値がこれまでのお見合い相手の年収分布において上位 50%に入っている確率は、 $U_{\zeta_{0.50}<500}$ の EAP 推定値から 96.6%と推測されました。

	EAP	post.sd
$\zeta_{0.50}$	392.707	54.337
$U_{\zeta_{0.50}<500}$	0.966	0.181
	95% 下側	95% 上側
$\zeta_{0.50}$	295.879	509.822
$U_{\zeta_{0.50}<500}$	0.000	1.000

第 8 章

- 1) $\delta_{p_{11}-p_{01}}$ の EAP 推定値より、比率の差は 0.05 であり、また、比率の差が 0 以上となる確率は 100%であるといえます。

	EAP	post.sd
$\delta_{p_{11}-p_{01}}$	0.056	0.007
$U_{\delta>0}$	1.000	0.000
RR	2.473	0.298
$U_{RR>2}$	0.959	0.198
OR	2.629	0.336
	95%下側	95%上側
$\delta_{p_{11}-p_{01}}$	0.042	0.070
$U_{\delta>0}$	1.000	1.000
RR	1.953	3.127
$U_{RR>2}$	0.000	1.000
OR	2.045	3.360

比率の差は小さい値のように見受けられますが、リスク比を確認すると、曝露群のリ

スクは 2.473 となり、約 2.5 倍であり、リスク比が 2 倍以上である確率は、0.959 より、95.9%であるといえます。また、オッズ比は 2.629 より、約 2.6 倍であり、リスク比に近い値となっています。

- 2) $ICC(3, 7)$ は、0.933 であり、 $\rho_{m,J'}$ を 0.9 以上にするためには、少なくとも 5 人以上必要であることが分かります。

	EAP	post.sd
$ICC(3, 7)$	0.933	0.039
ρ_{m4}	0.891	0.060
ρ_{m5}	0.910	0.051
	95%下側	95%上側
$ICC(3, 7)$	0.835	0.986
ρ_{m4}	0.743	0.975
ρ_{m5}	0.784	0.980

付録 3

- 1) Stan コード例
- ```
data{
 int<lower=0> N;
 vector<lower=0> [N] log_x;
}
transformed data{
 vector [N] x;
 for(n in 1:N){
 x[n] <- exp(log_x[n]);
 }
}
parameters{
 real mu;
 real<lower=0> sigma;
}
transformed parameters{
 real<lower=0> sig2;
 sig2 <- pow(sigma,2);
}
model{
 for(n in 1:N){
 x[n] ~ normal(mu,sigma);
 }
}
```
- 推定値は平均が 51.694、標準偏差が 6.804、分散が 47.750 となります。

## 2) Stan コード例

```
data{
 int<lower=0> N;
 vector<lower=0>[N] log_x;
}
transformed data{
 vector[N] x;
 for(n in 1:N){
 x[n] <- exp(log_x[n]);
 }
}
parameters{
 real mu;
 real<lower=0> sigma;
}
model{
 for(n in 1:N){
 x[n] ~ normal(mu,sigma);
 }
}
generated quantities{
 real<lower=0> sig2;
 sig2 <- pow(sigma,2);
}
```

- 3) 連鎖更新回数 50 回, ウォームアップ期間を 10 回とした場合の EAP 推定値は, 平均は 34.937, 標準偏差が 20.309, 分散は 720.872 となります. 連鎖更新回数を 20000 回, ウォームアップ期間 1000 回とした場合の EAP 推定値は 51.703, 6.802, 47.709 となります. また, 連鎖更新回数 50 回, ウォームアップ期間を 10 回とした場合,  $\hat{R}$  は平均 2.300, 標準偏差 1.900, 分散 1.493 であり, 有効サンプルサイズも平均と標準偏差が 3, 分散は 4 であったため, 更新期間は十分とはいえません. 一方, 連鎖更新回数を 20000 回, ウォームアップ期間 1000 回とした場合は,  $\hat{R}$  と有効サンプル数から更新期間は十分であるといえます.